Esprit mathématique, es-tu là ?

Dossier de lecture

Chantier d'écriture réflexive– module 3 - C.E.S.P. Hainaut, 2010/2011

Christian Watthez

Développer une culture mathématique chez tous les élèves …

« //s sont petits, vifs, curieux, veulent tout savoir, posent sans cesse des questions, refont cent fois la pyramide d'anneaux, essaient avec patience de faire entrer un objet dans la bonne cavité d'une bulle, comptent à toute heure du jour ... Des petits génies en herbe que l'on retrouve, douze années plus tard, désabusés, démotivés, peu aptes à interpréter un graphique, à comprendre une probabilité, à lire un plan, à exprimer ce qu'est une vitesse .

Que s'est-il passé ? Pourquoi tant d'entrain à 4 ou 5 ans ? Pourquoi un petit nombre, après douze années de métier (d'élève, cela s'entend) jongle avec les dérivées, les intégrales, les complexes, les matrices tandis que beaucoup n'y voient qu'un tissu de symboles ennuyeux, abscons, source de difficultés de pure forme, complètement inutile à leurs yeux ? Pourquoi tant d'exclus et, pour ceux qui vont jusqu'au bout, un savoir mathématique peu opératoire ? »

L'enjeu est de taille : celui de donner une culture mathématique à <u>tous</u> les élèves ... Comment ? … "Simplement", en les réconciliant avec ce que sont vraiment les mathématiques : un monde où l'on peut (aussi) grandir en trouvant le plaisir d'apprendre. Dès lors, comment amener chaque enfant, dès son entrée à l'école, à se sentir chez lui dans le monde des mathématiques ?

Voici un petit dossier rassemblant quelques articles sur ce sujet.

Après avoir exploré ce recueil de textes, je vous propose de :

1. **sélectionner 3 textes** (ou plus, si vous le souhaitez)
2. **lire chaque texte** choisi **en l'annotant et/ou en y réagissant par écrit**, selon le canevas suivant

J'ai lu le texte de … , intitulé …

Je réagis au contenu du texte (par exemple en annotant avec des surligneurs de couleurs différentes, selon les différents types de réaction possibles) :

- Je trouve que l'auteur a raison quand il affirme que …
- Je ne suis pas d'accord avec l'auteur quand dit que …
- Je ne comprends pas ce passage …

Je fais des liens (en les écrivant en marge, ou sur le document support ci-joint) entre le texte …

… et les autres textes que j'ai lus
(cet auteur dit la même chose que …/ dit le contraire de …)

… et l'expérience que j'ai acquise par le biais de ma pratique de classe

3. **compléter** ce recueil **en ajoutant un texte** (article complet ou extrait de texte) et en **précisant à quelle(s) question(s)** il permet d'apporter **des éléments de réponse**

Qui a tué le génie qui sommeillait en eux ?
Alain Desmarets, Benoit Jadin, Nicolas Rouche, Pierre Sartiaux

Une conception des mathématiques
Centre de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques

Mathématiques : apprendre ou comprendre ?
Roland Charnay

Nos options sur l'apprentissage
ERMEL

De l'élève à l'enseignant : deux témoignages
Odile Sotinel – Sylvie Menet

Le développement de sa pensée logique permet à l'enfant de structurer ses actions.
André Jacquart

Premiers pas, premières questions
Elsa Pelestor

Des mathématiques ludiques
Sylvie Dizel Doumenge

Les engrenages de mon enfance
Seymour Papert

Mon texte :

…

… apporte ***des éléments de réponse à la question …***

	***J'ai lu le texte de …*** ***intitulé …***

Je réagis à ce que dit l'auteur :

Je trouve qu'il a raison	quand il dit que …
Je ne suis pas d'accord avec lui	quand il dit que …
Je ne comprends pas	ce passage …

Je fais des liens entre le texte …

et les autres textes que j'ai lus : l'auteur … … dit la même chose que … en affirmant que … … dit autre chose que … en affirmant que …
… **et l'expérience que j'ai acquise** par le biais de ma pratique de classe

Qui a tué le petit génie qui sommeillait en eux ?

Alain Desmarets, Benoit Jadin, Nicolas Rouche, Pierre Sartiaux

//s sont petits, vifs, curieux, veulent tout savoir, posent sans cesse des questions, refont cent fois la pyramide d'anneaux, essaient avec patience de faire entrer un objet dans la bonne cavité d'une bulle, comptent à toute heure du jour … Des petits génies en herbe que l'on retrouve, douze années plus tard, désabusés, démotivés, peu aptes à interpréter un graphique, à comprendre une probabilité, à lire un plan, à exprimer ce qu'est une vitesse .

Que s'est-il passé ? Pourquoi tant d'entrain à 4 ou 5 ans ? Pourquoi un petit nombre, après douze années de métier (d'élève, cela s'entend) jongle avec les dérivées, les intégrales, les complexes, les matrices tandis que beaucoup n'y voient qu'un tissu de symboles ennuyeux, abscons, source de difficultés de pure forme, complètement inutile à leurs yeux ? Pourquoi tant d'exclus et, pour ceux qui vont jusqu'au bout, un savoir mathématique peu opératoire ?

Hors toute explication psychologique sur le comportement de l'adolescent - cela dépasse notre compétence - nous allons faire un petit tour des responsables sans avoir la prétention d'en faire une liste exhaustive. Mais ce sera plutôt l'occasion de rectifier quelques images largement véhiculées et pourtant fausses des mathématiques et formuler des pistes ou propositions de changement. Un changement qui, relativement facile à énoncer, s'avère plus difficile à mettre en oeuvre.

Les mathématiques elles-mêmes

Si tant d'élèves ont des difficultés en mathématiques, c'est parce que les mathématiques sont difficiles !?
« Je connais la tendance de l'esprit humain à faire n'importe quoi plutôt que de penser. Certes, aucun d'entre nous n'espère réussir sans travail. Nous savons tous qu'acquérir un tant soit peu de science exige un effort intellectuel considérable, et je suis sûr que nous y sommes prêts pour avancer dans notre discipline. Mais effort intellectuel n'égale pas pensée. Et ceux qui, à grand-peine, ont acquis l'habitude de s'appliquer à leur tâche, souvent trouvent plus aisé d'apprendre, une formule que de maîtriser un principe. » (MAXWELL, 1979)
Si Maxwell, l'un des plus grands physico-mathématiciens, génial fondateur de la théorie électromagnétique, reconnaît la difficulté de penser, comment croire alors à des mathématiques qui coulent de source, pour l'élève « ordinaire », assis dans une classe de première primaire ou de sixième année de transition ? Avec ou sans bosse, il faut forcer sa nature pour se mettre au travail et sans garantie de succès.

Même si elles trouvent leur source dans des problèmes de la vie concrète, de dessin, de physique, d'économie et d'autres, les mathématiques finissent par s'éloigner de leur contexte, elles deviennent souvent abstraites, s'expriment dans un langage très symbolisé et tendent souvent (trop vite probablement) à devenir formelles.

Le travail de recherche, avec le doute qui menace, le syndrome de l'impuissance qui plane, les nombreuses erreurs qui l'émaillent, est principalement motivé par l'aboutissement, la joie de réussir, de dominer un concept, une matière. Maxwell ajoute que *« malgré le recul naturel de l'esprit devant le dur processus de la pensée, pourtant, ce processus une fois accompli, l'esprit ressent une puissance et une jouissance qui l'amènent à mépriser désormais les peines et angoisses qui accompagnent son passage d'un stade de développement à un autre. »*

Alain Connes, mathématicien français qui parle également de se cogner, heurter à la réalité mathématique, précise que *« quand on trouve, il se produit quelque chose d'extraordinaire. On est anéanti par l'émotion. »* Bien sûr, l'élève n'est pas le mathématicien. Pour lui, le défi doit être bien dosé. Il ne peut attendre une vie. Et il n'y a défi que si les questions ne sont ni trop loin ni trop près de ce qu'il sait et sait faire. C'est de petits défis en petites réussites qu'il progresse, prend confiance en lui et se sent prêt à relever de plus grands défis.

Pour la question qui nous occupe, le peu d'intérêt, voire le dégoût, des jeunes pour les mathématiques, ce. sont pourtant moins les difficultés inhérentes à la pratique mathématique qui sont en cause que le manque de pratique mathématique dans les classes. Car il n'y a pas de math sans problèmes, pas d'apprentissage mathématique sans faire des mathématiques. Même pour les plus faibles que l'on juge incapables de comprendre. Paradoxalement, le vrai problème est bien là : à 18 ans, malgré un volume horaire substantiel, des élèves n'ont presque jamais fait de mathématiques.

La famille

Lorsqu'on évoque les carences et les problèmes des enfants, on ne peut pas s'empêcher d'évoquer, à tort ou à raison, les responsabilités familiales.

« La famille comme l'école sont des lieux où l'accumulation des traumatismes finit par déterminer entièrement le comportement de l'adulte devant la vie intellectuelle en général, et devant les sciences, en particulier. (…) Il faut bien admettre l'idée que nos concitoyens, dans la majorité, ont été traumatisés dans leur enfance par des attitudes et des méthodes répressives en famille et en classe (SCHATZMAN, 1989). >>

Evry Schatzman, astrophysicien, membre en France de l'Académie française, donne de nombreux exemples pour étayer sa thèse. Un premier exemple touche à l''apprentissage « géométrique » de l'enfant très jeune qui utilise son corps pour appréhender l'espace, ses trois dimensions, et tout particulièrement, la verticale. Il fait l'expérience de celle-ci, du haut, du bas, accomplit de nombreux essais, laisse tomber maintes fois le même objet, tient une boîte à l'envers et la regarde se vider. *« Mais cette expérience physique se complète immédiatement par une expérience morale. L'enfant est l'objet de remarques, de conseils, ou même de punitions corporelles* (SCHATZMAN, 1989) »

Certaines familles sont également accusées de léguer un lourd héritage à leur progéniture ; pudiquement, on parle de handicap socioculturel. Les jeunes de ces familles seraient mal préparés à suivre un enseignement mathématique souvent abstrait, éloigné du bon sens populaire, gratuit et plus proche de l'art que des sciences. B. Charlot (1972) réfute la thèse du handicap socioculturel et développe la notion de rapport au savoir. Quand une élève dit : *« Moi, je suis bouchée en math, je n'ai jamais rien compris, maman non plus elle s'en sortait pas »*, on comprend que l'élève ne fait pas qu'apprendre (ou ne pas apprendre) au cours, mais elle se situe également par rapport au cours. Pour B. Charlot, la réussite passe par un rapport positif au savoir, ce qui pose notamment la question de l'adéquation de l'école au rapport des milieux populaires au savoir.

En mathématiques, il faut reconnaître que le rapport au savoir est quelque fois très négatif aussi dans les familles dites bourgeoises. Il n'est pas rare d'entendre un avocat, un médecin se vanter d'une incapacité quasi congénitale en mathématiques, qui s'est manifestée toute sa vie scolaire et semble excuser les faiblesses de sa descendance.

Amener les élèves à un rapport positif au savoir, c'est un travail difficile mais incontournable pour celui qui enseigne des mathématiques. C'est donner l'occasion aux élèves de rencontrer les matières étudiées dans des contextes diversifiés qui montrent l'utilité et l'instrumentalité des concepts abordés ; c'est ouvrir les questions à des approches différentes de façon à tendre, si possible à chacun, un jour ou le lendemain, une perche qui rencontre ses intérêts ; c'est renverser l'image négative qu'un jeune a de lui-même en lui permettant de relever un défi, de trouver, de réussir quelque chose.

Les enseignants

C'est un lieu commun. Quel est l'élève, potentiellement doué, qui n'a eu à souffrir d'un enseignant incompétent et complexé ? Surtout en mathématiques. C'est là qu'on trouve les moins sympathiques, les plus autoritaires, les plus carrés, les plus sadiques, les plus « moffleurs ».

Image simpliste, loin des réalités ? Il faut reconnaître que certains enseignants en mathématiques n'ont jamais fait de mathématiques ou n'en n'ont plus fait depuis longtemps, tout comme les élèves auxquels ils s'adressent. Ils ramènent leur discipline à l'exigence et à la rigueur. Une fausse exigence qui repose plus sur le volume de travail que la qualité, qui s'appuie sur la mémoire des formules et le drill là où il faudrait recherche, réflexion et maîtrise des concepts, une fausse rigueur, une longue habitude de pointillisme qui tue l'imagination et inhibe le processus naturel de recherche. On pense que les mathématiques sont celles des traités. Elles sont polies, rigoureuses, avec leur lot d'axiomes, de théorèmes, de démonstrations logiquement enchaînées. Ce sont des mathématiques achevées, parfois loin des mathématiques en train de se faire. Celles-ci sont foisonnantes, mal structurées, intuitives, griffonnées sur des bouts de papier. On n'y trouve pas encore la belle rigueur du traité.

L'élève, lui aussi, doit pouvoir exprimer les choses avec ses mots, suivre ses intuitions, passer par des demi-vérités, procéder par essais et erreurs, prendre le temps de chercher sans être jugé, acquérir lentement un langage correct.

L'enseignant rencontre deux grosses difficultés pour accomplir correctement sa tâche. Tout d'abord celle de gérer la dynamique du groupe. Des élèves en activité, ce sont de multiples pistes de réflexion qu'il faut arriver à mettre ensemble. C'est du bruit dans la classe, ce sont des tempéraments fougueux qu'il faut freiner, ce sont des inhibitions qu'il faut lever et des paresses qu'il faut secouer. Ensuite, il faut différencier les pratiques en réponse à l'hétérogénéité intellectuelle du groupe tout en amenant tous les élèves à un niveau commun de compréhension de certaines théories.

La société

Ce n'est pas neuf, mais tellement vrai qu'il faut bien y revenir : les mathématiques jouent un rôle sélectif qui s'avère finalement préjudiciable pour la discipline. Non seulement dans les branches scientifiques, mais dans de nombreuses autres, à l'université ou dans les écoles supérieures, des cours de mathématiques (et de physique également) semblent plus se justifier par la sélection qu'ils provoquent que pour leur réelle utilité.

Que la société sélectionne, c'est normal. On ne peut confier sa santé à n'importe qui et on ne voudrait pas emprunter un pont construit par le premier venu. Que les grandes écoles jouent ce rôle sélectif, c'est acceptable même s'il faudrait peut-être revoir la façon dont on sélectionne. Mais pour l'école secondaire, qu'est-ce qui justifie ces coupes sombres successives et massives dans la forêt des petites têtes brunes, noires ou blondes. L'habitude. Une culture très répandue de l'échec ? Le besoin de valoriser un diplôme qui perdrait de sa valeur si tout le monde l'avait et pouvait présenter les examens à la poste ? La nécessité de préparer les jeunes aux études supérieures ? Curieuse façon de préparer que de faire le travail de sélection à la place des autres.

Dès la maternelle et à l'école primaire, il faut préparer à l'université. En première primaire, on fait des comparaisons entre écoles, Là, ils ont vu deux lettres en plus mais un chiffre en moins. La course commence tôt, le savoir encyclopédique s'accumule, tant pis pour les plus lents.

Le caractère incontournable et obligatoire des mathématiques dessert la motivation. Or il n'y a rien de pire que le dégoût, que l'échec sanctionné lourdement par le redoublement.

Tout se passe comme si les élèves couraient (ou concouraient) pour obtenir un diplôme et faire plaisir aux parents qui lient les cadeaux et les autorisations diverses aux résultats scolaires. En oubliant l'essentiel, c'est qu'ils sont à l'école pour apprendre. À un élève de cinquième qui a vingt ans, on supprime le rugby parce que ses résultats sont médiocres et que c'était le sport auquel il tenait le plus. Puis on lui retire son écran d'ordinateur. Quelle perversion ! Les élèves oublient l'essence même de leur métier pour viser on ne sait quelle réussite.

Il est grand temps de remettre le pot droit, de cibler les compétences indispensables à acquérir de 7 à 77 ans en mathématiques, de tenir un discours clair mais non culpabilisant aux élèves, d'adapter les structures aux rythmes, de rendre la différentiation réellement possible, de rencontrer les aspirations et les difficultés du plus grand nombre possible.

L'enseignement

« Les mathématiques sont une forme de pensée riche de sens, mais qui s'appuie sur des enchaînements formels et des combinaisons de symboles qu'il est possible (et parfois souhaitable) de manipuler sans se soucier du sens. L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte du sens et le repli sur la forme sans contenu : ne plus penser et se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis devient rapidement insoutenable. »

Les plus jeunes élèves font l'expérience de ce dérapage. Tout au début du comptage par exemple. Quelqu'un qui regarde durant une seconde une petite dizaine d'animaux disposés de façon anarchique dans un pré est dans l'impossibilité d'en exprimer le nombre exact ; alors que s'il voit une structure complexe comme un pont, il voit tout de suite de quoi il s'agit. Le plural n'est pas simple à saisir. F. Lemay (1979) parle de mur du plural difficilement accessible. Pourtant, dit-il, *« il est allègrement franchi ou du moins sans heurt apparent dès le premier jour d'école. »* Le terme « neuf » par exemple ne devient pas significatif pour l'élève parce qu'il arrive à répéter la suite *« un, deux, trois..., huit, neuf, dix »* et que l'on dit qu'il sait compter.

Malgré l'absence de contexte pour les opérations effectuées, l'abandon trop rapide du matériel permettant les manipulations, la rareté des sources d'intuitions géométriques, beaucoup d'enfants savent compter, c'est-à-dire énumérer une liste de sons et les mettre en rapport avec des collections d'objets. Beaucoup d'enfants connaissent le mécanisme de l'addition écrite, avec les reports. Beaucoup d'enfants connaissent les tables par deux, par trois ... Et savent faire des multiplications mentales ou écrites. Beaucoup ! Tandis que d'autres et pas spécialement les moins intelligents font une première expérience de manque de sens. Tout va tellement vite.

Bien sûr, on ne peut pas attendre de l'élève qu'il refasse l'histoire des numérations longue de nombreux millénaires; la première numération écrite connue date de 4 000 ans avant J.-C., en terre de Mésopotamie (actuel Irak) et d'Elam (actuel Iran). Bien sûr, on n'a pas le temps de lui faire réellement découvrir en quoi s'impose une numération de position, quels sont les avantages et les inconvénients de la base dix, pourquoi le zéro est nécessaire. Mais des maîtres plus instruits de l'histoire seraient plus conscients des seuils à franchir dans l'apprentissage du système décimal et pourraient faire travailler plus longuement leurs élèves sur les notions clés. Certains le font déjà.

Au début du secondaire, il y a un monstre qui s'appelle algèbre. Il y a des mois de factorisation, des semaines de produits remarquables et des jours de résolution d'équation. Malgré cela, en sixième année, peu d'élèves savent mettre une situation en équation. Et quand un élève *« fait passer les x de l'autre côté »*, il ne sait pas très bien si c'est additivement ou multiplicativement et pourquoi. Ils manipulent des symboles hors de tout contexte et sans les commenter dans leur langue maternelle. Ils doivent retenir des opérations constituées en dogme, il y a ce qu'on peut faire et ce qu'on ne peut pas faire. Et tout cela, paraît-il, parce que ça servira plus tard. Ça passe ou ça craque. Une fois encore, un grand nombre de jeunes passent à côté du sens et développent souvent un univers de sens parallèle.

À la fin du secondaire des élèves dérivent des fonctions sans avoir appréhendé la richesse du concept de dérivation et en avoir soupçonné la quantité d'applications. Pire, des élèves faibles que l'on juge incapables de comprendre l'outil, on se contente d'exiger qu'ils sachent calculer. Et eux, rassurés, se contentent de la réussite momentanée.

Tout se passe comme si l'enseignement des maths était une vaste entreprise de théorisation hâtive et de formalisation précoce. On se prive d'un enracinement profond des notions étudiées, passant par la rencontre de ces notions dans des contextes variés qui leur donnent sens. On oublie le caractère instrumental des concepts pour s'attarder longuement sur le calcul. On méprise l'histoire qui nous enseigne que chaque découverte est une réponse à un problème, que la maturation des théories a le plus souvent été longue, détournée et hésitante et on voudrait faire acquérir *«pour de bon»*, en une année, des concepts compliqués.
On sanctionne régulièrement les erreurs alors que l'évaluation est naturelle et continue pour l'élève amené à réinvestir dans de nouveaux problèmes ce qu'il a acquis sur les chantiers de problèmes déjà résolus.

Alain Desmarets, Benoit Jadin,
Nicolas Rouche, Pierre Sartiaux,
Oh, moi les maths ...
Editions Talus d'approche, 1997, p. 83

Une conception des mathématiques

CREM (Centre de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques)

Fondé en 1992, à l'initiative de quelques enseignants des universités de Bruxelles, Liège, Mons, Louvain-la-Neuve et Namur, le CREM (Centre de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques) a pour mission d'étudier les problèmes que pose l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte, et d'apporter éléments de réflexions et pistes pratiques aux enseignants qui ont la charge de développer une culture mathématique chez tous les élèves.

Le texte ci-après reproduit la première section du rapport de la Commission d'Étude de l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences. Il est pour le CREM un document de référence, car il exprime pour l'essentiel les convictions de ses membres sur le sujet.

La construction du sens dans les mathématiques

A travers leur diversité, les mathématiques sont parcourues de liens essentiels qui contribuent au sens de chacune de leurs parties. Elles ne sont pas une juxtaposition de concepts et de théorèmes plus ou moins autonomes.

Une définition n'a guère de sens par elle-même : elle répond aux besoins d'une théorie, on ne la comprend, et on ne comprend sa forme souvent très technique que quand on la voit fonctionner dans des démonstrations. Un calcul isolé est dépourvu de signification : si on calcule, c'est parce qu'on a besoin du résultat dans une démonstration ou une application. Pour comprendre une démonstration, il faut faire plus que vérifier ses chaînons logiques l'un après l'autre, il faut y discerner les idées directrices, celles par rapport auxquelles s'ordonnent ses détails techniques. Un théorème isolé est moins intéressant que la théorie à laquelle il appartient. Et enfin les théories, les structures mathématiques ne sont pas autonomes, elles fonctionnent les unes dans les autres.

Cette cohérence globale des mathématiques existe et est source de sens dès le niveau le plus élémentaire : il n'y a pas de cloisons étanches entre l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre et l'analyse.

Apprendre à penser mathématiquement

Les mathématiques peuvent être considérées comme un vaste ensemble de connaissances organisées déductivement. Mais apprendre les mathématiques (ou des mathématiques) consiste moins à absorber ces connaissances qu'à améliorer sa capacité de penser mathématiquement, de résoudre des problèmes. Focaliser l'apprentissage sur l'acquisition des théories conduit à privilégier la pensée déductive par rapport à la pensée en recherche, celle que l'on qualifie parfois d'heuristique. Penser mathématiquement mobilise l'imagination, l'intuition, le flair, le sens esthétique, l'induction (les conjectures) et aussi, cela va de soi, la déduction, la logique.

L'activité mathématique est une alternance, une sorte de contrepoint de l'imagination et de la logique. Elle produit à terme de la théorie déductive, mais elle n'est pas une activité essentiellement déductive.

Les mathématiques dans la pensée globale

A l'opposé souvent de la pensée commune, les mathématiques recourent à des concepts idéalisés : c'est le prix qu'elles paient pour pouvoir se construire sans ambiguïté sur le plan du raisonnement déductif. Malgré cela, les mathématiques interviennent utilement dans la vie quotidienne et dans les sciences naturelles ou humaines chaque fois qu'une situation peut être modélisée, c'est-à-dire saisie sans trop d'infidélité sur le mode de la structuration logique. Ainsi envisagées, elles ne sont pas une forme de pensée autonome, mais plutôt un registre de la pensée envisagée globalement.

Elles ne sont pas d'application universelle et sont même fréquemment utilisées hors de propos. Il est vrai pourtant que la plupart des sciences tendent naturellement à se mathématiser. Mais il ne s'en suit pas qu'un modèle mathématique reproduise fidèlement la réalité : il ne le fait que dans des limites qu'il faut préciser (et dans ces limites, il arrive souvent qu'il soit irremplaçable).

La conscience critique du statut propre des mathématiques et de leur relation (toujours à évaluer) à la réalité font partie de la culture utile à tout citoyen.

Les mathématiques dans la culture humaniste

On entend souvent dire que les mathématiques sont inhumaines ou encore qu'elles sont l'humanisme d'aujourd'hui. Ces deux affirmations sont à rejeter. Il nous paraît aussi inapproprié de négliger les autres sciences, les arts, la littérature, l'histoire et la philosophie que d'ignorer le rôle joué par les mathématiques dans la pensée occidentale et l'évolution de la civilisation. Il faut apprendre aux adolescents d'aujourd'hui comment les travaux, les affrontements et les croyances des hommes d'autrefois ont fait de nous ce que nous sommes, avec nos réussites et nos contradictions, et les rôles qu'ont joué parmi ces hommes Homère et Euclide, Shakespeare et Descartes, Mozart, Proust, Einstein, Hilbert et beaucoup d'autres.

Les mathématiques de la société industrielle

La civilisation technologique repose sur la conception et la conduite de machines de plus en plus complexes, capables, grâce à l'informatique, d'exécuter la plupart des routines. C'est pourquoi la part d'activité qui reste aux hommes relève soit de la pensée rationnelle qualifiée ou très qualifiée, soit des relations humaines ou de l'art, des sports, etc. Le partage social du travail dans la société de l'avenir est difficile à prévoir. Il est certain toutefois que la plupart des postes de travail dans l'industrie et les services exigeront de plus en plus de décisions réfléchies et de moins en moins d'exécutions routinières. Il est certain aussi que les besoins en personnel rompu aux mathématiques iront croissant.

Les mathématiques dont il s'agit sont bien celles d'aujourd'hui, dans toute leur extension. Comme celles du passé, elles ont trouvé la voie d'une fécondation mutuelle entre leurs parties les plus "pures" et leurs parties les plus "appliquées". Pour s'en convaincre, il suffit d'évoquer les liens qui unissent la recherche en mathématiques et les ordinateurs. Il n'y a donc pas lieu d'infléchir le courant mathématique vers plus de théorie pure ou plus d'applications, car ce serait une façon de le freiner globalement.

Les mathématiques du citoyen

S'il est vrai que les mathématiques sont un registre de la pensée, une façon appropriée de saisir certaines situations, alors chacun a droit à développer autant que possible, selon sa personnalité, sa capacité de penser et de s'exprimer mathématiquement. Or une fraction importante de la population recule devant les tâches mathématiques les plus élémentaires (et parfois en tire vanité) : l'analphabétisme mathématique doit être combattu.

Dans la mesure où, par ailleurs et comme noté ci-dessus, les activités des citoyens relèveront toujours plus de la réflexion que des automatismes, l'éducation mathématique doit viser la compréhension plus que les exécutions d'algorithmes. Elle doit entraîner les citoyens à réagir aux défis de la vie par des conduites intellectuelles constructives, critiques et précises.

Les mathématiques et la personnalité

L'activité de recherche sur des problèmes mathématiques, à quelque niveau qu'elle se situe, est une source de grande joie quand elle aboutit. Cette joie n'est pas gratuite : elle est toujours la récompense d'un effort. C'est pourquoi il est important de lancer aux élèves et aux étudiants, des défis à leur mesure, de vrais défis pour qu'ils doivent y répondre par assez de travail et d'imagination, pas trop importants toutefois pour qu'ils aient une chance raisonnable d'en venir à bout.

On ne saurait sans doute exagérer l'influence que peut avoir sur la confiance en soi et plus profondément sur la construction de la personnalité, le fait de se reconnaître capable de penser efficacement en mathématiques.

L'éducation mathématique forme un tout

Il est impossible de concevoir l'apprentissage des mathématiques comme une accumulation de connaissances dont chacune serait définitivement acquise du premier coup. On ne comprend jamais rien complètement à la première rencontre. Le sens d'un concept, d'un théorème ne s'approfondit que par l'usage, par la reconnaissance de leur rôle, de leurs tenants et aboutissants dans un ensemble plus vaste de connaissances.

C'est pourquoi l'éducation mathématique ne peut être pensée seulement par tranches horizontales (le maternel, le primaire, le secondaire inférieur, le secondaire supérieur, etc.), non plus d'ailleurs que par tranches verticales (la géométrie, l'algèbre, la trigonométrie, les probabilités, l'analyse), et non plus enfin indépendamment de ses liens avec les autres disciplines.

Elle doit être construite dans sa cohérence globale d'un bout à l'autre de la jeunesse, avec des passages et repassages aux points clés et chaque fois un approfondissement, une généralisation, une vue plus large. C'est ce qu'on appelle souvent l'enseignement "en spirale".

L'écueil majeur : la perte du sens

Les mathématiques sont une forme de pensée riche de sens, mais qui s'appuie sur des enchaînements formels et des combinaisons de symboles qu'il est possible (et parfois souhaitable) de manipuler sans se soucier du sens. L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte du sens et le repli sur la forme sans contenu : ne plus penser et se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis devient rapidement insoutenable.

Ce genre de dérapage affecte déjà les jeunes élèves quand ils additionnent deux nombres selon les règles, mais sont incapables de justifier ce qu'ils font. On le retrouve à toutes les étapes, jusqu'à l'étudiant qui dérive des fonctions sans idée claire de ce qu'est une dérivée.

Le problème majeur de l'enseignement des mathématiques est sans aucun doute celui du sens.

CREM
www.crem.be

Mathématiques : apprendre ou comprendre ?

Roland Charnay

Auteur d’un très grand nombre d’articles et d’ouvrages consacrés à l’enseignement des mathématiques, Roland Charnay a été formateur à l’IUFM de Lyon et co-responsable du groupe de recherche Ermel. Il a assuré le pilotage de la commission chargée de l’élaboration des programmes français de mathématiques en 2002.

Dans ce texte, il réagit à la prestation du ministre de l’Education Xavier Darcos sur le plateau de l’émission « le Grand Journal » de Canal + (émission du 3 mars 2008[i]) : on y voit le ministre, chantre d’un retour à un enseignement plus « classique », incapable de mettre en œuvre une technique de calcul dont il veut pourtant privilégier le retour en force à l’école. Face à cette étonnante incompétence du ministre, Roland Charnay y trouve quelques arguments pour remettre en questions les choix pédagogiques de ce dernier et exprime ses inquiétudes vis-à-vis du projet imminent de « nouveaux programmes » pour l’école élémentaire française, annonceurs selon lui d’un net recul sur le plan des apprentissages mathématiques.

Ce moment d’une émission de Canal + aurait pu n’être qu’anecdotique et qu’un buzz médiatique supplémentaire. Or il nous place au cœur des problématiques soulevées par le projet de programmes pour l’école primaire.

Monsieur Darcos est l’invité. L’animatrice lui propose de passer au tableau et lui demande d’utiliser la règle de trois pour résoudre le problème suivant : Si 4 stylos coûtent 2,42 € , quel sera le prix de 14 stylos ? Pour l’aider, elle écrit les nombres en les disposant sur le tableau. Embarras du ministre qui, beau joueur, avoue ne pas savoir répondre, ajoutant que c’est parce que maintenant tout cela se fait avec une calculatrice. La journaliste explique alors un mécanisme de la règle de trois (qui n’est d’ailleurs pas celui qui était enseigné dans les années 50).

Cet épisode est éclairant à plus d’un titre. Il a été dit que l’école devait fournir très tôt aux élèves les techniques qu’ils garderaient ensuite toute leur vie. Manifestement, cela n’a pas fonctionné avec la règle de trois, ce qui pose la question de savoir si cette technique est, à l’école primaire, aussi fondamentale et nécessaire qu’on veut bien le dire.
La réponse se trouve dans l’intervention de la journaliste qui clôt cet épisode en expliquant qu’il aurait peut-être été plus simple de calculer d’abord le prix d’un stylo (4 fois moins cher que 4 stylos) puis celui de 14 stylos (14 fois plus cher qu’un stylo). Le prix d’un stylo ne s’exprimant pas ici en euros et centimes d’euros, elle aurait aussi pu expliquer qu’il est facile de calculer le prix de 12 stylos et celui de 2 stylos, puis d’ajouter ces deux prix pour avoir celui de 14 stylos ou encore considérer que le prix de 14 stylos c’est 7 fois le prix de 2 stylos…

Autrement dit, en utilisant un raisonnement assez naturel, à la portée, lui, des élèves de CM1 ou de CM2, il est aisé de résoudre le problème posé. Ce qui a embrouillé notre ministre, c'est qu'on lui a demandé d'utiliser une technique apprise, mais non comprise, là où réflexion et raisonnement permettent de répondre. Muni d'une calculatrice, il ne s'en serait sans doute pas mieux sorti, dans la mesure où elle ne calcule pas directement la fameuse « règle de trois » et où il est donc nécessaire que l'utilisateur détermine la suite de calculs qui doivent être exécutés !

Un peu plus tard, dans la même émission, Monsieur Darcos défend l'apprentissage au CE1 de la technique du calcul posé d'une division par 2 ou par 5 d'un nombre inférieur à 100, avouant ne pas comprendre pourquoi « ça fait polémique ». Il s'agit donc, entre autres, de savoir diviser, avec la potence, 87 par 5. Détaillons un peu ce que l'élève doit comprendre pour parvenir au terme de ce calcul. Il faut, par exemple, avoir compris que cela revient à diviser 8 dizaines et 7 unités par 5 et qu'il est préférable de commencer par les dizaines. Pour diviser 8 dizaines par 5, il faut soit se demander ce que donne le partage équitable de 8 dizaines en 5 (1 dizaine et il reste 3 dizaines), soit se demander combien de fois 5 est contenu dans 8 dizaines (1 dizaine de fois). Il faut remarquer qu'on a alors utilisé 5 dizaines et qu'il en reste 3 à diviser. Ces 3 dizaines représentent 30 unités qui, ajoutées aux 7 unités, donnent 37 unités à diviser en 5. On est alors amené à imaginer qu'on partage 37 unités en 5 ou qu'on cherche combien de fois 5 unités sont contenues dans 37 unités. Pour obtenir la réponse rapidement, il faut être capable de situer 37 entre deux résultats de la table de multiplication par 5 (5 x 7 et 5 x 8). Etc., car ce n'est pas encore tout à fait terminé. Il existe bien entendu une autre solution pédagogique qui consiste à faire ânonner par les élèves un récitatif sans signification : « En 8 combien de fois 5 ? 1 fois 5. Ca fait 5. 8 moins 5 égale 3. J'abaisse le 7. En 37 combien de fois 5 ? Etc. ».

Volontairement, nous sommes entrés un peu dans le détail pour sortir des arguments jetés à la volée, sans justification. La compréhension de cette technique suppose donc la mobilisation conjointe de nombreuses connaissances encore mal assurées à ce moment de la scolarité. D'un autre côté, un apprentissage purement mécanique est difficile lorsque les étapes n'en sont pas justifiées. Dans tous les cas, l'échec, le dégoût et la perte de confiance guettent de nombreux élèves. Et que de temps consacré à répéter bêtement, au détriment d'un travail sur les bases du calcul mental (si important) et sur le sens de cette opération. Car, si l'apprentissage du calcul posé de la division de 87 par 5 ne présente, au CE1, que des inconvénients, la recherche de la solution à un problème comme « Thomas a 87 stylos. Il remplit des boîtes de 5 crayons. Combien de boîtes peut-il remplir ? » n'est, elle, pas dénuée d'intérêt à ce niveau de la scolarité. A condition, que à l'instar de ce qui aurait pu se passer pour le problème des stylos dans l'émission télévisée, on incite les élèves à réfléchir. Par exemple, à penser qu'on peut d'abord remplir 10 boîtes, qu'on alors utilisé 50 crayons et qu'il en reste donc 37 à ranger ; on peut donc, par exemple encore remplir trois fois de suite 2 boîtes (avec 10 crayons), puis encore 1 boîte. Et là, les élèves auront réalisé un travail mathématique, c'est-à-dire qu'ils auront cherché, réfléchi, utilisé leurs connaissances. En appui sur ce travail, il sera temps, par exemple au CE2, au moment où les instruments de la compréhension seront en place, de codifier une technique qui organise leurs calculs.

C'est affirmé dans le socle commun : « Il faut aussi comprendre des concepts et des techniques (calcul, algorithme) et les mémoriser afin d'être en mesure de les utiliser ». Pourquoi, dans ce projet de programmes, privilégie-t-on à ce point la mémorisation par rapport à la compréhension alors que les deux sont nécessaires et que la seconde est souvent une condition de la première ; l'exemple de la « règle de trois » est là pour l'illustrer.

Finalement, à travers ces deux exemples, ce sont quelques uns des enjeux fondamentaux de l'enseignement qui sont en cause. Lorsque l'école fait apprendre aux élèves, par la seule répétition, des techniques qu'ils ne comprennent pas et dont ils ne maîtrisent pas l'usage, elle les rend inaptes à aborder des questions qui peuvent être traitées en utilisant les connaissances acquises et en faisant appel à l'imagination et au raisonnement. Et avec ce projet de nouveaux programmes, c'est bien là que se trouve le nœud du débat (pour peu qu'il y ait débat !). Veut-on former des individus qui peuvent affronter des situations diverses et parfois nouvelles, en mobilisant des concepts et des techniques qu'ils maîtrisent parce qu'ils les ont compris et en faisant appel aux capacités d'initiative et de réflexion qu'on les a aidés à développer ? Ou veut-on formater des automates seulement capables de répéter et de reproduire ce qui leur a été enseigné ? Avec ce projet, on semble avoir fait le deuxième choix. S'il devait advenir qu'il soit effectivement retenu et mis en œuvre, les conséquences en seraient lourdes pour nos enfants et pour notre pays.

Roland Charnay
Professeur agrégé de mathématiques
« Le café pédagogique », 6 avril 2008

[1] **:** Un extrait de cette émission est visible sur le site www.youtube.com (mots-clés : Darcos Grand journal)

Nos options sur l'apprentissage

ERMEL
Equipe de didactique des mathématiques

1.1. Un élève construit ses connaissances...

Apprendre ne consiste pas à recevoir purement et simplement le savoir des enseignants, à "prendre" et à archiver des informations nouvelles. L'apprentissage dépend de la manière dont l'élève organise les informations qu'il reçoit, les interprète, les code, les intègre comme informations nouvelles, les mémorise. Il dépend d'une activité intellectuelle, d'opérations cognitives, par lesquelles l'élève transforme des informations qu'il reçoit en connaissances qu'il s'approprie.

Sans ce travail il n'y a pas d'apprentissage. Les informations données par l'enseignant ont une durée de vie limitée fa plupart du temps à l'échéance à laquelle elles devront être restituées *("vous apprendrez la leçon pour jeudi prochain"*) ; au-delà, elles restent sous la forme de souvenirs vagues, ou bien, plus souvent, disparaissent. À ce caractère éphémère s'ajoute leur extrême contextualisation : l'élève ne sait les utiliser que dans les situations où elles ont été présentées ou au mieux dans des situations très proches.

1. 2 à partir de ce qu'il sait déjà...

Le traitement de l'information que l'élève reçoit commence par la comparaison avec ses connaissances actuelles : le premier temps de tout apprentissage est un temps "d'assimilation" où l'élève cherche à établir des analogies, des ressemblances, (*c'est comme*), des différences (*ce n'est pas pareil que*), des identités (*c'est la même chose que*) avec ce qu'il sait déjà.

Les connaissances qui sont les siennes en début d'apprentissage sont le seul outil dont il dispose pour s'approprier quelque chose de la situation proposée, faire une première tentative "d'intégration". Cela signifie qu'une activité pédagogique a deux frontières. L'une est l'identité entre ce qui est proposé à l'élève et ce qu'il sait déjà : il s'agit alors d'une activité d'exercice, de renforcement, dans laquelle rien de nouveau n'est appris si ce n'est à mieux faire ce qu'il sait faire. L'autre est la distance maximale entre ce qui est proposé à l'élève et ce qu'il sait déjà : ce qui domine alors chez lui est l'impression d'étrangeté et d'impuissance à trouver un point d'accrochage.

Ces connaissances antérieures à l'apprentissage sont loin d'être homogènes chez les différents enfants d'un même groupe classe, et même chez un seul enfant. Elles ne sont en effet pas équivalentes du point de vue de leur "scientificité" :

- certaines se réfèrent à la vie quotidienne et au langage naturel qui l'accompagne : *"1//4 c'est une part ; quand on est nombreux on fait beaucoup de quarts"* ;

- d'autres tiennent à la résurgence, en situation scolaire, de "fossiles" du développement cognitif : beaucoup d'élèves, face à une leçon à apprendre, croient qu'il suffit de la regarder pour qu'elle s'inscrive magiquement en eux ou qu'il suffit de penser à ce qu'il y a à faire pour que ça se fasse : *"ma leçon de maths ? Ah oui !, c'est ce qu'on a fait hier, je le sais"*. Considérer comme réalisé ce qui reste à faire, c'est un reliquat de la pensée animiste que beaucoup d'élèves conservent, faute d'avoir eu accès à d'autres informations sur l'acte d'apprendre ;

- d'autres, enfin, tiennent à l'histoire scolaire des élèves, et parmi elles, il peut y avoir
  - des trous : des connaissances estimées acquises à un certain niveau de la scolarité, mais absentes, pour de multiples raisons, chez certains élèves (il y a encore des élèves de 5e qui maîtrisent mal la divison de deux décimaux)
  - des connaissances exactes,
  - des "théorèmes de l'élève" qui sont la généralisation de procédures localement justes hors de leur champ d'application. Ainsi les élèves qui ont acquis la technique de l'addition dans N et D continuent à l'appliquer dans Q (même après apprentissage) et ne comprennent pas, puisque *"c'est pareil"* pour la multiplication (ils se le représentent comme "pareil"), que ce soit différent pour l'addition.

Dans ta situation d'apprentissage, la plupart de ces connaissances sont pour l'élève à la fois des repères et des obstacles, offrant des points de résistance à l'appropriation de la connaissance nouvelle. Certaines connaissances exactes sont elles aussi dans ce cas, puisque l'intégration du savoir nouveau va les déséquilibrer, les définir autrement (leur donner de nouvelles limites) pour les réinstaller dans un équilibre plus vaste. Aussi n'est-il pas surprenant d'assister à des pertes apparentes de compétence au moment d'un nouvel apprentissage. Il ne faut pas interpréter ces pertes en terme de remplacement d'un savoir par un autre (ou d'oubli) mais en terme de "rééquilibration" difficile d'un système perturbé.

Il est important pour l'enseignant de connaître l'état de savoir de ses élèves au moment où il aborde un nouvel apprentissage, moins pour se lancer systématiquement, et avec le sentiment du temps perdu, dans des révisions, que pour choisir une situation d'apprentissage proche de ce que savent les élèves mais suffisamment éloignée pour qu'ils ressentent l'insuffisance des outils dont ils disposent.

1. 3 lorsqu'il a un problème à résoudre

Les commentaires de l'Inspection Générale sur les programmes actuels soulignent le rôle des problèmes dans l'apprentissage :

"Une appropriation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes.

... les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la résolution fera intervenir "des outils" (c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises) afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles... (les "bonnes activités") doivent développer la capacité de poser des problèmes et de progresser vers leur résolution."

Qu'est-ce qu'un problème en situation d'apprentissage ?

- c'est un "vrai" problème, nouveau, jamais fait, jamais rencontré, que l'élève ne peut résoudre totalement en mobilisant un système de réponses déjà constitué (par opposition au problème de réinvestissement, qui est l'occasion de montrer qu'on a appris) ;

- c'est une situation que l'élève ne peut traiter de façon satisfaisante avec des outils dont il dispose déjà, et//ou que des élèves différents traitent avec des outils différents qui les conduisent à produire des réponses différentes, et à douter ainsi de l'adéquation des outils utilisés.

Un problème est donc un instrument de déstabilisation qui introduit un décalage entre ce que sait l'élève à un moment donné (ses représentations, les règles, théorèmes, définitions qu'il connaît) et les exigences de la tâche. L'élève engage à élaborer de nouvelles représentations et procédures, c'est-à-dire à apprendre. Le problème ne joue ce rôle que si le décalage qu'il introduit a du sens pour l'élève, c'est-à-dire s'il est :

- suffisamment près de ses connaissances disponibles pour être "assimilé",

- et suffisamment éloigné pour le faire rencontrer des "obstacles", des "os" à casser, et l'engager à transformer sa manière actuelle de penser et de travailler.

La difficulté est, pour l'enseignant, de gérer cette "proximité".
Trop près, on fait une pédagogie des petits pas, donnant l'illusion que le chemin de la connaissance est uniforme, régulier, sans creux ni bosses, et qu'il suffit de "suivre" pour savoir et régler la question de cohabitation entre l'ancien et le nouveau. Trop près, il n'y a pas de problème mais une pédagogie de la continuité. Tout savoir nouveau est toujours un plus.
Trop loin, il n'y a pas non plus de problème : si l'élève n'a pas les moyens de se poser une question, la question ne se pose pas (du moins pour lui).

La fonction du problème en situation d'apprentissage est celle des déséquilibres successifs, nécessaires à la marche. Qui ne fait jamais l'expérience de risquer son équilibre ne marche pas.

La situation d'apprentissage induite par le problème est une situation de recherche, dans laquelle l'élève entre dans des activités d'hypothèses, d'explorations, d'essais, de vérification. C'est une situation de mathématisation. Il ne s'agit pas, bien entendu, de reconstruire l'univers mathématique à coup de séances de 45 minutes mais de mettre, sur des problèmes précis, les élèves en situation de production de connaissances mathématiques, en les incitant à exercer à leur niveau, les activités cognitives qui sont celles de tout mathématicien. C'est au professeur de choisir, en s'appuyant sur ce qu'il sait des connaissances de ses élèves et des difficultés internes au savoir visé, ces situations propices à l'exercice de la pensée mathématique. Cela signifie également que l'organisation des séances doit permettre de prendre en compte et d'exploiter les différentes propositions faites par les élèves (nous reviendrons plus loin sur le rythme et la fonction des différentes phases de travail, individuel, en petits groupes et collectif).

Enfin, en prenant connaissance des essais, brouillons, etc. de ses élèves, l'enseignant peut lire leurs erreurs et leurs procédures les plus fréquentes : elles le renseignent sur les savoirs auxquels ils raccrochent la connaissance nouvelle et lui permettent de mieux placer les obstacles qu'il leur donnera à affronter.

1. 4. L'aboutissement d'une construction de connaissance, c'est la formulation

Limiter l'apprentissage au traitement des situations de recherche desquelles émerge la connaissance nouvelle risquerait de développer des savoir-faire, des procédures techniques, qui, même s'ils étaient partagés par tous les élèves, n'aboutiraient pas à un savoir commun, "institutionnalisé", formulé. Ces connaissances de l'ordre du savoir-faire (connaissances exclusivement "procédurales") sont limitées quant à leur puissance et leur généralisation : elles sont liées aux situations qu'elles permettent de traiter et nécessitent souvent des enchaînements de tâches partielles, coûteuses en temps et en attention, et susceptibles de détourner l'élève du but qu'il poursuit. La formulation des règles, le passage aux connaissances "déclaratives" qui assurent une communication univoque dans la communauté scientifique (ou du moins scolaire), sont l'aboutissement de l'activité de construction de la connaissance ; pas plus qu'un enseignant ne peut se contenter que ses élèves connaissent règles, définitions et formules sans savoir les appliquer, il ne peut se contenter qu'ils sachent faire sans savoir dire.

D'où l'importance de toutes les activités d'explication et de formulation.

Les échanges entre les élèves, à l'intérieur de petits groupes, les incitent à avoir accès à leurs propres opérations de pensée et à les contrôler plus explicitement pour pouvoir les mettre en mots.

On a souvent remarqué qu'un élève contrôle son travail différemment s'il est prévenu qu'il devra ensuite en parler avec un camarade. Ces interactions sont, en outre, favorables à la mise en évidence des "conflits" dont il est question plus haut. Les confrontations, les tentatives d'explications entre élèves ayant des points de vue différents sont le lieu d'émergence des accords, déclencheurs de progrès (à condition que la socialisation de l'élève soit suffisamment bonne pour qu'il intériorise cette contradiction, qu'il la fasse sienne pour la surmonter) ; les procédures, mises à l'épreuve de l'explication, sont comparées, essayées par d'autres, évaluées par rapport à la tâche (on reconnaît l'équivalence de certaines d'entre elles, éventuellement on justifie ce qui fonde cette équivalence).

De la même façon, on consacre du temps, à la fin d'un ensemble d'activités, à la formulation de règles qui peuvent aller, selon les cas, de la règle-action (pour obtenir.., il faut faire, si on fait on obtient) à la formalisation.

La formulation est une aide très puissante à la décontextualisation, c'est-à-dire à la distinction entre la règle et la situation dans laquelle elle a été élaborée et qui a permis l'apprentissage. Formuler oblige l'élève à se séparer des images mentales liées à la situation d'apprentissage ("habillage" de la situation, éventuellement action sur du matériel), à se poser la question de la généralisation et du champ d'application de la règle.

1.5. Pour apprendre, un élève a besoin de temps

Le temps nécessaire à un apprentissage tel que nous venons de le décrire est très différent du temps nécessaire à l'exposé du corpus de connaissances visé.

- Temps de recherche et d'expérimentation : temps des conjectures, des vérifications, des validations ; temps des échanges contradictoires, de la formulation explicite des choix et de leur justification, de la discussion sur leur validité et leur extension ; temps de la synthèse et de la formulation : la conduite à terme de la construction d'un savoir nécessite bien plus de séances que la leçon suivie d'exercices d'application.
- Temps de l'appropriation : entre le moment où le savoir est construit et le moment où il est réellement disponible, c'est-à-dire intégré au système de connaissances de l'élève, le temps peut être long. Temps de l'exercice, de la "routinisation"[1], temps pour faire mieux, temps pour faire vite ce que l'on sait bien faire ; temps pour se familiariser avec la connaissance nouvelle, pour pouvoir l'utiliser sans repasser par les étapes qui lui ont donné naissance.

Ce temps est souvent laissé à la gestion de l'élève " c'est celui du travail personnel. Or chaque enseignant sait la difficulté qu'ont les élèves à s'organiser dans cette phase de leur apprentissage.

---

[1] Ce néologisme nous a paru utile pour décrire la transformation des connaissances en "routines", au sens informatique du terme, elles sont "compilées" pour être mobilisables plus rapidement et à moindre coût, sans nécessiter de reconstruction.

Dans le cadre de notre expérimentation, nous avons réservé des séances à ce travail, sans pour autant décharger l'élève de tout travail personnel. Ces séances ont comme caractéristique de ne présenter aucune difficulté nouvelle : il s'agit, soit sur des exercices donnés à ce moment précis, soit sur la correction d'exercices préparés à la maison, de s'entraîner, d'acquérir de l'assurance, de faire le point sur ce qui se consolide et sur ce qui mérite de continuer à être travaillé, exercé.

La prise en considération du temps nécessaire à l'élève pour apprendre nous a amenés à nous poser la question de l'échéance des évaluations.

Les enseignants ont l'obligation de fournir des notes à l'administration, dans des conditions qui sont propres à chaque établissement. Cela conduit souvent à faire des contrôles en cours d'apprentissage ou immédiatement à l'issue d'une phase d'apprentissage. Il convient de ne pas interpréter ces contrôles au-delà des informations qu'ils peuvent nous donner. La réussite à cette forme de contrôle consiste souvent à restituer un algorithme, une procédure sur lesquels on est en train de travailler pour résoudre une classe de problèmes proches de ceux sur lesquels on a appris. Elle ne donne aucune information fiable, aucune prédiction possible sur la longévité du savoir. Tel élève qui sait se débrouiller "à chaud" continue à savoir faire appel, plus tard, à ce qu'il a appris ; tel autre qui obtient un bon résultat ne sait plus reconnaître que l'emploi d'un outil permet de résoudre un problème s'il est sollicité dans un moment éloigné de l'apprentissage ou sur une situation décalée par rapport à celle de l'apprentissage. Inversement, le fait de ne pas être immédiatement performant ne signifie pas que l'élève n'apprend pas. La déstabilisation des savoirs qui accompagne tout apprentissage peut se manifester par des baisses de performance et la production d'erreurs. Pour un enseignant, le fait de connaître les erreurs les plus fréquentes par lesquelles passe un élève qui apprend lui permet de relativiser les évaluations, de ne pas conclure hâtivement à un échec de l'apprentissage et éventuellement, de ne pas dissuader un élève d'apprendre en sanctionnant négativement les efforts qu'il fait pour apprendre et dont ses erreurs sont la marque.

Dans le cadre de notre expérimentation, les contrôles destinés à évaluer l'état de savoir des élèves et, à travers lui, la validité des outils que nous proposons, ont été situés après les grandes phases d'apprentissage et après un temps suffisamment long pendant lequel les élèves ont eu des occasions d'intégrer ce qu'ils ont appris à leurs procédures de résolution.

ERMEL
Equipe de didactique des mathématiques,
Apprentissages mathématiques en 5^e^, p. 23
Institut National de la Recherche Pédagogique,1993

De l'élève à l'enseignant : deux témoignages

Odile Sotinel - Sylvie Menet

Voici deux témoignages pour le moins contrastés : celui d'Odile Sotinel, qui est professeure des écoles et celui de Sylvie Menet, professeure de mathématique en collège.

Petit lexique pour comprendre ces deux textes :

Collège : étape de la scolarité qui suit l'école primaire, en France. Les élèves entrent au collège à 11 ans et y restent 4 années. Le collège correspond à la 6e année primaire et aux trois premières années du secondaire, en Belgique.
6e : en France, c'est la première année du collège.
4e : troisième année du collège, (= 2e secondaire en Belgique)
2e : première année du Lycée, en France (= 4e secondaire en Belgique).
Bac A, Bac B … : correspondent aux filières d'orientation du lycée, qui débouche sur l'obtention d'un Baccalauréat.
IUFM : Institut Universitaire de Formation des Maitres, composantes de l'Université chargées de la formation initiale des enseignants
CAPES : certificat d'aptitude au professorat du second degré. Diplôme obtenu sur concours, il permet d'enseigner au collège ou au lycée.

J'ai un peu de mal …

Je n'ai pas eu de difficultés majeures en maths à l'école primaire, si ce n'est déjà un sentiment de malentendu entre ce qu'on me disait des maths et ce qu'elles étaient réellement.
Ainsi, lors de mes débuts dans la soustraction à retenue, on me disait :
« *Puisque tu prends une dizaine pour soustraire les unités, il faut que tu la redonnes au moment où tu soustrais les dizaines.* »
En mon for intérieur, je me disais que je n'avais aucunement l'intention de prendre quoi que ce soit à cette opération qui de toute façon, ne s'en rendait absolument pas compte ; par conséquent, je ne lui devais rien. Cette façon anthropomorphique d'expliquer les maths pour mieux comprendre ne me réussissait pas bien. Le problème est que j'avais du mal à abstraire et que la version concrète me semblait tout à fait farfelue et inventée de toutes pièces.

Cela dit, je suis quand même bien arrivée à m'approprier les mécanismes des quatre opérations et à venir à bout des problèmes.

Au collège, c'était l'époque des maths modernes. Au début, j'ai bien aimé. J'ai appris un certain nombre de choses sur les ensembles ; on dessinait des patates remplies de croix, des intersections, on copiait des définitions… Mais si on faisait quelque chose de plus abstrait, j'avais du mal à suivre.

J'ai le souvenir d'avoir eu du mal à comprendre les fractions. Je ne voyais pas l'intérêt de les présenter comme telles.
Pourquoi ce trait entre les deux chiffres ? Si c'était pour exprimer une division, pourquoi ne pas les faire comme d'habitude (en ligne ou en les posant) ? Quant aux calculs sur ces fractions, ils m'apparaissaient comme un jeu de passe-passe qui allait trop vite pour moi.

Je crois qu'en général, je ne m'intéressais pas suffisamment aux mathématiques pour mobiliser mon attention et ma mémoire du début à la fin de la leçon.
Cela ne me parlait pas et m'ennuyait souvent. Je prenais quelques bribes et je me décourageais vite. Mes résultats étaient très moyens sans être catastrophiques. Je réussissais de façon très différente selon les enseignants.

Ainsi, en 4e, le début d'année avait été très pénible. Notre professeure, fraîchement agrégée, était visiblement très mal à l'aise devant une classe. Elle s'est fait chahuter et s'est mise en arrêt maladie. Elle a été remplacée par un homme très gentil et ouvert qui faisait la classe en ayant le souci de voir réussir ses élèves.
Il eût été dommage de le décevoir, il avait un si beau sourire…
J'ai eu de très bons résultats au deuxième et troisième trimestre.

En 3e, si j'ai pu réussir le premier contrôle, ça a été tout. Je n'aimais pas du tout notre prof, une grande dame qui ne mettait pas beaucoup d'allant à ses explications et qui était presque toujours enrhumée. J'ai pourtant fait un effort. J'ai même pris des cours de maths, mais je n'ai pas du tout accroché.

Je n'ai pas eu le choix de passer un bac B (éco) parce que mes résultats en maths étaient trop bas, juste bons pour faire A (littéraire). Je ne regrette pas d'être allée en A parce que j'ai bien aimé ce que j'ai fait en philo, en français et en langues. Par contre, j'ai trouvé dommage de n'avoir que deux garçons dans ma classe (dont un qui abandonnera en route).
Mais même en A j'ai eu du mal en maths. Je me souviens avoir travaillé de façon intense sur la question des limites (avec le tableau, les flèches qui montent et qui descendent, le symbole de l'infini). J'ai cru plusieurs fois avoir compris mais le résultat de mes contrôles était sans appel : bien inférieur à la moyenne.

En tant qu'institutrice, j'ai toujours fait attention aux maths. Sachant que je n'y suis pas toujours à l'aise, je me suis bien entourée de manuels, de préparations solides. Alors que je peux me sentir plus libre en français, il ne m'arrive que très rarement d'improviser en maths.

Même maintenant je peux avoir quelques difficultés. Pour la conversion d'une monnaie par exemple. Quand j'entends que l'euro est plus fort que le dinar, j'ai tendance à comprendre qu'il a une valeur supérieure à celle du dinar et quand on me dit qu'un dinar est égal à 0,80 centimes d'euro, je suis un peu perdue… Bon, si je me pose et que j'y réfléchis, je m'y retrouve, mais j'avoue, j'ai un peu de mal…

Odile Sotinel
Professeure des écoles,
Cahiers Pédagogiques n° 427, p.19,
novembre 2004

Comment les maths m'ont aidée à grandir

L'enfance et l'adolescence.

Pour la petite (puis grande) fille timide et complexée que j'étais, les mathématiques étaient associées à un jeu, le plaisir de jouer à déduire, à calculer… ; un autre monde idéal et rassurant dans lequel tout est « carré », organisé, dans lequel il y a des règles incontournables, sans exception, sur lesquelles on peut compter sans faille. Et des enseignants qui m'emportaient dans le plaisir d'apprendre. Les mathématiques ont construit mon côté rigoureux.

La fin du lycée.

Je souhaitais être pharmacienne: soigner, aider les malades, m'attirait et révélait mon côté sauveur. Mais :
« *Vous êtes trop bonne en maths*, me dit la prof de maths, *vous devez plutôt aller en maths sup pour devenir ingénieur.* »
Ce métier n'avait aucun sens pour moi, puisque mon milieu familial était très éloigné de ces élites auquel je pouvais prétendre appartenir.
« *Très bien, je serai donc ingénieur.* »
Merci les maths.

Le premier métier.

Pendant presque dix ans, à défaut de traiter des malades,
je traitais des images et dialoguais en informatique avec des ordinateurs. À quoi, à qui étais-je utile ? À faire faire de tout petits pas à la recherche en traitement d'images ? Pour qui ? Pour quoi ? Où était l'humain dans ce dialogue, ce système?
Je ne m'y retrouvais pas.
Et pendant ce temps, une petite voix, souvent, me soufflait l'idée de revenir aux mathématiques en les enseignant.

Les enfants.

Je découvrais la magie d'accompagner la vie, avec la ribambelle de questions sur : un enfant, comment ça marche ?
Comment ça grandit ? Comment ça apprend?… Comment faire et comment donner le mieux, le meilleur?… Et puis,
à un moment donné, les circonstances m'ont amenée vers *le choix* de passer le CAPES de mathématiques. Enfin.

Le retour aux sources.

Sources constructives. Le retour à l'humain, aussi. Le retour du « sauveur » ? Je force un peu le trait, bien sûr, mais il y avait trop de cela, au début, et ce n'était pas du tout rose.
Je ne remercierai jamais assez les *maîtres* qui m'ont aidée et soutenue dans la formation à l'IUFM et dans les classes.

Ils (elles) m'ont appris combien la distance est nécessaire pour enseigner: l'élève au centre, bien sûr, mais avec le savoir pour communiquer. Aujourd'hui, je me sens à ma place, grandie et reconnue par les collègues, les élèves, les parents…
Merci aux maths pour m'avoir donné du plaisir et de la rigueur, pour m'avoir permis l'accès à un certain niveau social. Aujourd'hui, les maths sont pour moi non seulement un savoir à transmettre, dans lequel j'essaie de faire goûter le jeu, le questionnement… mais aussi un médiateur pour communiquer avec des élèves de toutes origines culturelles et sociales.

Sylvie Menet,
Professeure de mathématiques
en collège, près de Nantes
in : Cahiers Pédagogiques n° 427, p. 20,
novembre 2004

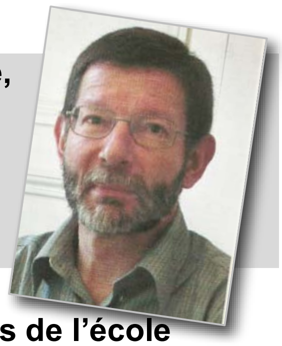
Le développement de sa pensée logique permet à l'enfant de structurer ses actions

Entretien avec André Jacquart

André Jacquart est est professeur de mathématiques à I'IUFM Nord-Pas-de-Calais. Il a conçu du matériel éducatif pour l'école maternelle, notamment "Mathoeufs" et "Mathmobiles" (édités chez Asco), les Ateliers "Acromaths" et "Quadriludi" (édités chez Nathan).
Il anime des conférences centrées sur le "développement de la pensée logique et la résolution de problèmes en maternelle".

L'entretien ci-dessous fait partie du dossier «Du tri à la logique» paru dans le n° 2 d'octobre 2007 de la revue « L'Education Enfantine ».

Les mathématiques ont une place légitime à l'école maternelle, dans la mesure où elles permettent l'observation, le questionnement, l'expérimentation et la déduction.
André Jacquart nous explique comment ce mode de pensée mathématique peut être développé en classe.



Lorsque les enseignants ont consulté les programmes officiels de l'école maternelle parus en 2002 (en France), ils ont constaté avec étonnement qu'ils ne comportaient pas de rubrique intitulée « Mathématiques ». Pensez-vous que la légitimité de parler de cette discipline se pose et faut-il s'interroger sur le bien-fondé de travailler dans ce domaine ?

La place des mathématiques à l'école maternelle est depuis longtemps le sujet de débats contradictoires... En fait, que sont les mathématiques ? Elles sont un langage utilisant une écriture symbolique. Et à ce titre, elles n'ont pas leur place à l'école maternelle. Elles sont aussi un ensemble de concepts, d'objets, d'outils. Certains d'entre eux doivent être approchés dès le cycle 1 ; il est vrai, cependant, que les cadres sont alors souvent éloignés de ceux dans lesquels les mathématiciens opèrent. Elles sont enfin un mode de pensée -"l'esprit logique"- ,qui permet de résoudre des problèmes par l'observation, le questionnement les essais et ajustements puis, progressivement, la déduction. Considérées **sous cet** angle, les mathématiques ont une place légitime et essentielle à l'école maternelle.

Comment concevez-vous le développement de la pensée logique avec de jeunes enfants et pouvez-vous nous définir votre notion de "problèmes pour chercher" ?

Développer la pensée logique à l'école maternelle c'est, d'une part, doter les élèves d'outils leur permettant de découvrir le monde ; ils doivent ainsi apprendre à comparer, classer, ranger, coder… Mais c'est aussi les aider à passer de la manipulation "désordonnée" à des conduites plus structurées. Pour cela, les "problèmes pour chercher" ont un rôle essentiel. Depuis quelques années, ils ont leur place à l'école, même si celle-ci reste encore trop marginale. Ces problèmes pour chercher placent les élèves devant une situation nouvelle ; ils exigent de faire preuve d'engagement, de créativité, d'originalité. Il ne s'agit pas seulement d'appliquer des outils ou des méthodes ; l'enfant doit analyser, essayer, réajuster. Il devient un "petit chercheur" !

Vous avez contribué à la conception d'un matériel structuré, adapté pour la maternelle. En quoi permet-il d'atteindre les objectifs que vous venez d'évoquer ?

Les matériels structurés tels que "Les Ateliers Acromaths" permettent de développer l'activité logique, dans la mesure où ils offrent la possibilité d'expérimenter avec des objets dont les propriétés sont rigoureusement définies. L'attention des enfants n'est pas détournée par des éléments matériels pouvant complexifier la situation et les éloigner du problème posé «Ce sont souvent, par ailleurs, des "matériels ouverts",c'est-à-dire des matériels offrant une grande variété de situations.

En dehors d'un matériel très structuré, comment, selon vous, l'enfant peut-il aussi "découvrir le monde" en développant sa pensée logique ?

Acquérir des compétences notionnelles ou transversales nécessite des approches multiples. Les matériels structurés doivent avoir leur place, mais ils ne peuvent revendiquer une exclusivité dans les apprentissages. Il est important que les enfants
soient confrontés à des types de matériels et des situations construites les plus variés possibles. Les situations rituelles et fonctionnelles ne doivent pas non plus être exclues. Leurs contours seront quelquefois plus difficiles à cerner, mais elles sont indispensables pour que les enfants "découvrent le monde" dans sa diversité.

Quelles sont les compétences qui peuvent être acquises par la fréquentation des suites itératives ou récurrentes, utilisées à l'école maternelle dans tous les jeux algorithmiques ?

L'enjeu de ces activités est double. Au même titre que les jeux de société, les activités algorithmiques amènent les enfants à la notion de règles qu'il faut repérer et respecter. C'est une composante de l'activité mathématique. La démonstration - que les élèves aborderont quelques années plus tard - est un "jeu" au cœur duquel les règles sont fortes. Par ailleurs, dès le cycle 2, les élèves seront confrontés à des structures algorithmiques qu'ils devront comprendre et utiliser. La suite des nombres écrits en chiffres et, partiellement, la suite orale sont des suites algorithmiques. Dans un autre registre, plus complexe, les techniques opératoires sont aussi des algorithmes.

Les nouveaux jeux à la mode, tels que le sudoku, apportent-ils des nouveautés dans le développement de la pensée logique ?

Le sudoku - sous réserve de l'adapter aux capacités de l'enfant - est accessible à tous, même à l'école maternelle. Il constitue un exemple caractéristique de "problème pour chercher". Il demande peu de connaissances, mais requiert un comportement de chercheur. Même si des stratégies peuvent émerger, chaque sudoku apporte une situation nouvelle. L'intérêt de ces grilles est aussi d'apprendre aux enfants à "manipuler" les informations. Combien d'élèves d'école élémentaire se limitent à la lecture linéaire d'un problème, sans avoir le souci de croiser les informations, et se trouvent ainsi en situation d'échec ?! ...

Comment, à votre avis, pourra-t-on évaluer que toutes ces démarches mises en œuvre seront réinvesties et transférées dans d'autres apprentissages ?

L'évaluation est toujours un problème délicat, en particulier a l'école maternelle. Certes, l'enseignant ne peut pas porter un regard constant sur l'activité de chaque élève. Mais c'est par le croisement des observations dans différents contextes qu'il évaluera plus précisément les niveaux de compétences de chacun. Il faut aussi se départir de l'idée selon laquelle l'activité "papier-crayon" serait idéale pour évaluer. Elle en constituera, dans certains cas, un élément, mais ne pourra pas à elle seule permettre une évaluation fiable.

André Jacquart,
propos recueillis par Gisèle Méténier,
Education Enfantine n°2, p.12,
Octobre 2007

Premiers pas, premières questions

Elsa Pelestor

Elsa Pelestor est une jeune professeure des écoles.
Dans cet article, elle partage les difficultés qu'elle a rencontrées dans l'enseignement des mathématiques à ses élèves de fin d'école primaire.

Petit lexique pour comprendre cet article :
CM2 : dernière année de l'école primaire, correspondant à la 5e primaire en Belgique
6e : première année de l'école secondaire en France (collège), les élèves y ont l'âge des élèves belges de 6e primaire.
PE2 : deuxième année de formation des professeurs des écoles, dans le cycle de la formation en IUFM (abandonnée depuis 2009).
Instructions Officielles : textes référents légaux destinés à guider le travail des enseignants (Programmes, …)

J'ai débuté en 2004 et j'ai eu mon premier CM2 en 2005. Cette année-là, j'ai testé la situation « du banquier » *(voir encadré)*. Après les trois phases, un élève m'a dit que j'étais la meilleure maîtresse qu'il avait eue car il avait tout compris à la division et qu'il savait « maintenant » ce qu'il faisait quand il divisait ! C'est bien évidemment le genre de chose que l'on entend rarement de la part des élèves, mais qui met vraiment du baume au coeur ! Durant ma formation comme PE2, j'ai découvert ce que sont les théories constructivistes et socioconstructivistes. N'ayant pas une formation scientifique, je me sentais incapable de donner du sens aux notions mathématiques par moi-même ! Je me souviens de cette année de terminale, où je faisais des calculs d'intégrales sans erreur, et où je ne comprenais pas ce que je faisais ni surtout à quoi cela servait ! Je maîtrisais parfaitement la technique, mais je n'ai jamais compris ce que je faisais, à la manière d'un enfant qui divise parfaitement, sans savoir ce qu'il fait. Pour ma pratique d'enseignante, je m'en suis donc remise à des méthodes d'apprentissage des mathématiques. Les méthodes qui me paraissent convaincantes, ce sont celles qui me permettent d'abord à moi de donner du sens !
À mes yeux, « travailler le sens » consiste à rattacher une notion mathématique à quelque chose de concret pour l'enfant, à quelque chose qu'il puisse prendre et comprendre, de manière à l'avoir toujours quelque part dans son esprit quand il abordera la technique et l'utilisation algébrique de ce qu'il aura alors bien assimilé, sans avoir à faire à nouveau le long cheminement de la compréhension.

Donner du sens c'est d'abord « passer par les sens » !

Pour les philosophes empiristes anglais des XVIIe et XVIIIe siècles, passer par les sens est un moyen pour l'enfant d'arriver à un raisonnement abstrait. Les démarches de type constructiviste et socio-constructivistes me semblent questionner l'enfant plutôt que d'asséner des vérités ; elles interrogent les enfants sur ce qu'ils apprennent, les lancent dans une activité où

ils sont acteurs, maçons et tisserands de leurs compétences. Je crois que mon travail est d'ancrer certaines bases, nécessaires à l'apprentissage ultérieur de l'algèbre et des propriétés géométriques, sans livrer telles quelles les techniques purement symboliques.
Il arrive que certains professeurs de collège se plaignent des méthodes du primaire fondées sur la manipulation car les enfants ne « savent pas compter ».
Il ne me semble pas que ces manipulations soient un obstacle au travail plus algébrique qui a lieu en 6e : c'est plutôt un ancrage profond sur le sens.
Mais donner du sens ne se limite pas à la manipulation. L'observation et la déduction grâce au langage ont un rôle fondamental.

La verbalisation, un moyen de donner du sens ou plutôt de construire le sens.
Les chercheurs insistent sur les formes de verbalisation comme un moyen pour les enfants de conceptualiser et d'approfondir leurs connaissances. Dans ma classe, la verbalisation prend toutes les formes possibles : dialogues des enfants entre eux quand ils sont lancés dans
une activité de groupe ; entre un élève et l'enseignant ; échanges entre groupe-classe et l'enseignant ; parole du maître.
Ainsi, suivant les besoins, j'utilise :

- la reformulation de la consigne par les élèves (notamment ceux qui décrochent quand j'explique le travail !) ;
- les verbalisations qui permettent de donner du sens à ce que l'on est en train de faire (travail en groupe, ou quand je demande à un enfant en particulier ce qu'il est en train de faire) ;
- les verbalisations, dans des phases de mise en commun qui permettent d'expliquer ce qu'on a fait, les observations qu'on a faites et ce qu'on en déduit ;
- les verbalisations orales ou écrites de ce qu'on a compris, qui fixent le sens et vont vers un savoir plus abstrait, vers une règle mathématique.

La verbalisation pendant la recherche, ou après la recherche, me semble être un véritable moyen de donner du sens à des choses qui resteraient sinon trop concrètes ou trop abstraites. Trop concrètes si on en reste à la manipulation, trop abstraites si on n'est pascapable de dire ce que l'on fait (comme par exemple dire ce que je fais quand j'abaisse un chiffre dans une division).

Le choix de bons manuels !
Le choix des méthodes est primordial pour quelqu'un qui n'a pas de formation mathématique. Je m'aide de guides du maître qui sont très souvent détaillés : ils indiquent les compétences travaillées en regard des *instructions officielles*, les savoirs requis ou visés, les objectifs de la séance. Ils prescrivent la démarche à suivre de manière succincte ou très précise. Les guides les plus détaillés vont même jusqu'à présenter les erreurs probables des élèves et nous aident à y remédier. Du coup, les courants didactiques sont évidents et les auteurs exposent leur parti pris en début de guide.
Toutefois, je n'arrive pas à suivre mot pour mot une méthode et ce pour plusieurs raisons. Sans dresser de procès, certains manuels sont incomplets notamment en géométrie ; d'autres proposent des séances de 60 minutes qui dans les faits durent 180 minutes ; on peut les accuser d'être trop complets !
Enfin, il est très difficile de s'identifier à une démarche qu'on n'a pas soi-même construite. Il n'en reste pas moins qu'il est heureux que ces guides existent, car s'ils me permettent d'entraîner mon esprit critique, ils me permettent aussi d'enseigner les maths avec le sentiment de ne pas faire n'importe quoi, d'amener les élèves à mettre du sens. Si cette difficulté à trouver LE manuel qui me conviendrait retentit sur mon organisation et engendre

un surplus de travail (toujours à chercher ce qui, à mon sens, est le mieux), j'y perçois aussi un aspect positif. Certains critiquent telle ou telle méthode en disant que sortis de ces méthodes, les élèves sont perdus, ne savent plus rien faire. En en utilisant plusieurs, j'ai le sentiment de ne pas les cantonner à telle ou telle façon de faire. Toutefois, dans la classe, les élèves ont un manuel, que je n'utilise plus quand je perçois des incomplétudes ou des manques en regard des *instructions officielles de 2002*, qui sont une véritable mine de travail et de conseils pour les enseignants.
Ce que j'ajoute à chaque méthode, de manière de plus en plus systématique, c'est le « j'ai appris », « verbalisé », dicté par la classe ou écrit individuellement (et corrigé) avant de se lancer dans des exercices de réinvestissement ou plus systématiques. La leçon est à apprendre, et cela permet d'ancrer davantage les notions, et aide aussi les parents qui veulent aider leurs enfants à faire leurs devoirs à ne pas parasiter le sens.
Même si ces méthodes ne favorisent pas la « facilité » puisque l'élève est chercheur, acteur de son savoir, et requièrent du temps en préparation puis en mise en oeuvre, ces méthodes m'ont apporté certains plaisirs dans mon enseignement.

Mais quand le sens ne vient pas…

Bien entendu, malgré le travail sur le sens, il reste des élèves sur le bord du chemin, des élèves en détresse scolaire qui ont acquis très peu de compétences depuis le début du cycle (CE2), et pour ceux-là j'ai le sentiment que dans une configuration de classe ordinaire le travail sur le sens n'y peut rien parce qu'il est difficile de différencier la pédagogie au point qu'ils rattrapent leur retard, au point de faire de l'individuel pur (bien que j'essaie de considérer chaque cas).
Pour ceux-là, après le travail en classe avec tous, j'entre dans une démarche plus transmissive. C'est-à-dire que je montre le travail à réaliser : par exemple, en géométrie, je montre et ils copient ce que je fais. En algèbre, on fait un exemple ensemble et ils le reproduisent. Je sais qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils font, je pense aussi ne pas leur rendre service sur du long terme mais j'ai le sentiment qu'ils sont moins en échec, *sur le coup*, qu'ils arrivent à faire « comme » les autres, et s'ils obtiennent une note entre 8 et 12/20, je me dis qu'ils ont davantage envie d'apprendre et d'y arriver que s'ils ont toujours 6/20. Je ne suis pas fière de mon enseignement, mais je me dis au moins qu'ils sont contents d'eux-mêmes car ils ne sont pas laissés de côté, et ils peuvent « avancer » dans le programme. Je me rends bien compte que même s'ils font « juste », en fait ils n'ont pas compris ! Je pense ainsi tenir compte de l'aspect psychologique de l'apprentissage.
Je garde simplement l'espoir qu'un jour, avec de la maturité, ils comprendront ce qu'ils font à la condition d'y revenir, comme cela m'est arrivé !

Inscrire l'élève dans un devenir

Il faut accepter le fait que le savoir de l'élève est en construction, quel que soit le champ disciplinaire, et qu'il faut nous garder de détruire les bonnes volontés, d'abandonner les enfants qui malgré leurs difficultés veulent réussir. Que ce n'est pas parce qu'on ne sait pas diviser en CE1 qu'on ne saura jamais diviser, mais au contraire, c'est peut-être parce qu'on connaît la technique opératoire de la division en CE1 qu'on ne saura jamais vraiment diviser. Avec ce que m'apporte ma maigre expérience de l'enseignement (quatre ans plus un an de préparation au concours) j'ai le sentiment que le travail sur le sens, est quelque chose de durable, de profond et de concret. En revanche, si on agit en surface, on distribue des notes convenables (comme je le fais avec mes élèves en difficulté) on n'inscrit rien de manière définitive ; on est dans un monde de simulacre où l'on croit savoir mais qui nous berne d'illusions, pour répondre à des

exigences d'évaluations et de performance. J'espère simplement et modestement apporter une pierre à l'édifice, comme l'ont fait mes collègues avant moi et comme le font certainement les collègues du secondaire.
J'aimerais savoir ce que deviennent mes élèves au collège ; on a très peu d'échanges avec les professeurs de mathématiques, les échanges les plus fréquents se faisant avec nos collègues de français (lors de défi lecture, de représentations théâtrales, de liaison CM2/6e). Les élèves ont-ils des « restes » de ce qu'ils ont appris ou bien faut-il tout reprendre à zéro ? S'ils ont de bonnes bases, cela veut dire que le pari du sens est réussi.
Les collègues ont-ils le sentiment qu'on a bien fait notre travail ?

Elsa Pelestor
Professeure des écoles,
EPC Jean Moulin, Cavaillon
Cahiers Pédagogiques n° 466, p.53,
octobre 2008

Trois manières de verbaliser porteuses de sens : le banquier

Lors d'une situation d'apprentissage de la division. Trois élèves doivent se partager 4 122 euros en billets de 1000, 100, 10 et pièces de 1, sans utiliser de calculs, ni même au début, un quelconque support écrit.
Après avoir reformulé la consigne, les élèves travaillent en groupes (homogènes pour cette situation, sinon celui qui est plus avancé fait tout le travail pour les autres, et là ça ne fonctionne pas !). Souvent, grâce à une première discussion, des groupes se sont rendu compte qu'ils n'avaient pas compris et viennent me demander de l'aide.

Puis, je passe dans les groupes pour voir où ils en sont, ce qu'ils ont compris de la tâche à effectuer. Quand je vois qu'ils n'ont pas compris, je les questionne ce qui permet une précision. Si au contraire un enfant a compris, je lui propose d'expliquer aux autres (et non pas de montrer ni de faire, mais d'expliquer de manière à mieux posséder encore son savoir). On répète l'opération avec d'autres nombres. Puis, vient la phase de mise en commun lors de laquelle les élèves expliquent ce qu'ils ont fait : « On a partagé 4 122 euros en 3. On a donné 1 billet de 1 000 euros à chacun (1M) et il est resté un billet de mille ; on l'a « cassé » et on l'a échangé contre 10 billets de 100. On en avait déjà 1 et on en a donné 3 à chacun (3C). Il en est resté 2. On les a « cassés » et on les a échangés contre 20 billets de 10, mais il y en avait déjà 2. Cela a fait 7 billets de 10 chacun (7D). Il en est resté 1. On a échangé 1 billet de 10 contre 10 pièces de 1 ; mais il y en avait déjà 2, cela en a donc fait 12 à partager, et on en a pris 4 chacun (4U).

Quand on sait que les problèmes liés à la division au CM2 ne relèvent pas seulement des tables, mais de confusions liées au reste (« j'abaisse le… », sans savoir qu'ils procèdent à des échanges entre unités supérieures et unités inférieures), cette situation peut servir de remédiation à des enfants qui sont prisonniers de la technique (parfois apprise prématurément par leurs parents) et qui ne sont pas capables de repérer leurs erreurs.
Dans cette situation, la manipulation est mise en relation avec une feuille de partage où sont consignés les différents échanges, puis avec la technique de la division en potence.

Des mathématiques ludiques

Stéphanie Dizel Doumenge

Cela ressemble un peu aux « Jeux sans frontières » et ses petits groupes de candidats qui doivent relever des défis.

Exceptionnellement, Sandrine Chevarin a réorganisé, ce matin de décembre, sa classe de CM2 en petits groupes de travail de 4 ou 5 élèves. L'objectif : préparer ses 29 élèves à l'épreuve de "Mathématiques sans Frontières" qui se déroule le mardi 10 février 2009. La fine équipe a donc deux mois pour mettre à profit et réinvestir ses acquis en mathématiques, dans l'optique de pouvoir résoudre une série de problèmes ouverts.

L'enseignante commence par rappeler le principe de cette épreuve : *"Ce n'est pas un concours entre vous, c'est la classe en entier qui doit résoudre un problème et proposer une solution. Pour ce 1er jour d'entraînement, vous allez travailler par petits groupes, pour que nous puissions confronter les différentes solutions proposées."*

Réfléchir ensemble

Les feuilles jaunes (brouillon) et blanches (raisonnement et solution) sont distribuées, le défi n° 1 peut être lancé.

Un bidon plein de lait pèse 25 kg, mais le même bidon à demi plein de lait pèse 13 kg. Quel est le poids du bidon vide ?

Volontairement, l'enseignante a organisé des groupes hétérogènes, à l'exception d'un qui réunit quatre enfants ayant des difficultés plus fortes de compréhension. *"J'ai prévu, pour ces enfants, des coups de pouce, qui peuvent les aiguiller dans leur raisonnement. "*

L'idée étant que, fort de ces entraînements, les élèves acquièrent le réflexe de réinvestir les outils pour le jour de l'épreuve.

Chaque groupe se voit remettre une enveloppe contenant l'énoncé et dispose de 10 minutes exactement pour coucher sur la feuille leur solution. C'est parti !

Un premier groupe dessine les deux bidons pleins et à moitié remplis en indiquant le poids. *"12+12=24 et 13-12=1,* déclare Victoria. *Donc le bidon pèse 1 kg.* " Les trois autres enfants sont d'accord avec son calcul, Hugo se saisit de la feuille blanche pour rédiger leur proposition. Agathe, d'un autre groupe, lance des pistes : "*Si le bidon pèse quelque chose, il faut enlever quelque chose à 25...* " De fil en aiguille, les enfants s'arrêtent aussi sur le poids de 1 kg.

Le temps est déjà écoulé et l'enseignante se replace au centre des tables, devant le tableau. Le groupe de Kemal est invité en premier à présenter sa proposition. Muni d'un feutre rouge, Kemal explique : *"13 + 13 = 26 et 26-25 = I, donc le bidon pèse I kg. "*
Sandrine Chevarin revient sur ses propos en précisant les données : le chiffre 13 correspond bien au poids du bidon de lait à demi plein, mais pourquoi soustrait-il 25 de 26?

C'est toute la difficulté de l'exercice, formuler une réponse et le raisonnement qui y a abouti. C'est au tour du groupe bénéficiant du "coup de pouce" d'être appelé au tableau. Agathe expose : *"25 - 13 = 12, 13 - 12 = 1, donc le poids du bidon vide est de 1 kg. "*
À nouveau se pose la question du choix de la soustraction et de ces chiffres précisément. Mais, contrairement à leurs camarades, Agathe et les trois autres enfants de sa table ont pu manipuler deux verres et du sable pour représenter le problème. Et tout devient plus clair.
"Le chiffre 12 obtenu de l'opération 25 - 13 représente la masse de lait qu'il faut ajouter pour remplir le bidon. Le chiffre 13 représente la masse de lait + le poids du bidon."

Le groupe de Matisse conteste pourtant le résultat, selon leur raisonnement le bidon pèse 0,5 kg. Il s'avère que ces quatre enfants ont opéré les bonnes opérations de soustraction mais ont omis une donnée, ce qui les a conduits à un résultat erroné. Après encore quelques instants de discussion, l'ensemble des enfants se rallie à la réponse commune de 1 kg.

Défi n° 1 relevé.

Discuter et convaincre
"Je vous propose maintenant un problème de famille, cela arrive souvent", déclare, amusée, l'enseignante.
Les enveloppes sont distribuées, le chrono est lancé.
« Quel est le plus petit nombre possible d'enfants dans la famille Martin si chaque enfant a au moins un frère et une sœur ? »
L'enseignante s'approche du groupe bénéficiant du coup de pouce et leur demande comment ils entendent procéder.
Agathe déclare spontanément qu'il faut au moins un frère et une sœur. C'est un bon début. Thalys décide de lire le coup de pouce : il les invite soit à reproduire un schéma, soit à utiliser le groupe par imitation. Les autres groupes ont d'ailleurs spontanément opté pour le schéma, et des dessins de filles et de garçons parsemés de flèches apparaissent un peu partout.
Dans le groupe plus en difficulté, Josselin poursuit : *"Je choisis un frère, Thalys, et une sœur, Liridona." "Liridona, tu veux bien vérifier que tu as le bon nombre ?",* lui propose Sandrine Chevarin.
"J'ai un frère, c'est Josselin, j'ai un deuxième frère, Thalys, mais il me manque une sœur. " Elle se tourne donc vers Agathe pour la désigner comme sœur. Après avoir vérifié que le compte est bon en partant de Thalys puis d'Agathe, le groupe conclut qu'il faut au moins 2 frères et 2 sœurs. Les 10 minutes sont à nouveau écoulées et les solutions sont confrontées.
Margot, désignée en premier, déclare : *"Je viens avec la mauvaise réponse mais je vais vous expliquer pourquoi. "* Son groupe a en effet retenu le chiffre 3 mais elle explique en quoi il est erroné. En vérifiant à nouveau leur schéma, Margot avait réalisé que le garçon dessiné avait bien un frère et une sœur mais que la fille

dessinée avait 2 frères, et pas de sœur. Hugo reste pourtant fermement convaincu du chiffre 3. L'enseignante appelle un autre groupe pour le convaincre. Valentin affiche son schéma : *"Nous avons fait un schéma avec un frère et une sœur; nous avons ajouté une sœur mais le frère n'avait que des sœurs; nous avons donc ajouté un frère, ce qui donne 2 frères et 2 sœurs.* » Hugo n'est toujours pas convaincu. Le groupe "coup de pouce" se rend donc au tableau expliquer sa façon de procéder. Josselin désigne dans son groupe son frère et sa sœur, Thalys confirme qu'il a bien au moins un frère et une sœur, et Liridona justifie la nécessité de choisir une autre fille, la 2e sœur.
L'enseignante formalise la démonstration : "*Lors du 1er défi,]osselin et son groupe ont manipulé, maintenant ils ont mimé pour trouver la solution."* Devant cette démonstration réaliste, Hugo s'incline et se rallie à la réponse commune, 2 frères et 2 sœurs.

Déjà midi sonne, les enfants n'ont pas vu le temps passer, se rendant à peine compte des outils qu'ils mettaient en oeuvre pour résoudre ces problèmes ouverts. *"C'est tout l'intérêt de ces exercices,* confirme Sandrine Chevarin. *Les élèves doivent acquérir l'automatisme de réinvestir les outils, que ce soit le schéma, la déduction, l'imitation."*

La prochaine fois, les 29 élèves de CM2 devront se poser cette question délicate :
Dans la cour, il y a le même nombre de porcs, de canards et de poules. Ces animaux ont tous ensemble 144 pattes. Combien y a-t-il de canards ?

Top chrono.

Stéphanie Dizel Doumenge,
in : Les Maths, c'est élémentaire,
Dossier JDI n°6, février 2009

Les engrenages de mon enfance

Seymour Papert

Seymour Papert (né le 29 février 1928 à Pretoria en Afrique du Sud) est un mathématicien, informaticien et éducateur au Massachusetts Institute of Technology (MIT). Il est l'un des pionniers de l'intelligence artificielle, ainsi que l'un des créateurs du Langage Logo. Dans son livre «Jaillissement de l'esprit», où il relate l'invention du Logo, il lève un coin du voile sur l'origine de sa passion des mathématiques.

Je n'avais pas deux ans quand me vint la passion des voitures. Les noms des pièces automobiles prirent une place importante dans mon premier vocabulaire : j'étais tout fier, en particulier, de connaître les pièces du système de transmission, la boîte de vitesse et, plus encore, le différentiel. Il me fallut, bien sûr, attendre plusieurs années avant de comprendre comment fonctionne un engrenage ; mais à partir de ce moment-là les engrenages devinrent pour moi une source de jeux de prédilection. J'adorais faire rouler l'un sur l'autre des objets circulaires, en leur imprimant des mouvements d'engrenages ; quand je reçus un jeu de construction, évidemment, ma première réalisation fut un système d'engrenages rudimentaire.

Je devins expert à faire tourner dans ma tête des roues dentées, et à suivre des enchaînements de cause à effet : "Celle-ci tourne dans ce sens-là, donc celle-là doit tourner dans ce sens-ci, donc ..." . C'était pour moi une grande source de plaisir.

Je crois que d'avoir tant joué avec des engrenages m'a davantage ouvert aux mathématiques que tout ce qui m'a été enseigné à l'école primaire. Les engrenages, en me servant de modèles, ont fait entrer dans ma tête des notions qui risquaient de demeurer abstraites. Je suis convaincu que ce genre de rapprochement a contribué pour moi à doter les mathématiques d'une charge affective positive - autrement dit me les a fait aimer, tout comme j'avais aimé, enfant, les systèmes d'engrenages.

Et pourtant ...

... Je me souviens que personne ne m'avait imposé d'étudier ces engrenages. D'autre part, je me souviens très bien de cette sorte de passion, de plaisir, d'émotion, qui teintaient ma relation avec les engrenages, en plus de la simple compréhension. Enfin, je me souviens que cette première rencontre eut lieu dans ma seconde année. Si d'aventure un psychologue, spécialiste de l'éducation, et se voulant "scientifique", avait cherché à "mesurer" les effets visibles de ce premier contact, il n'aurait probablement rien trouvé. Il avait pourtant eu des conséquences profondes, mais, j'imagine, mises en réserve pour des années après. Un test du style "avant-après", effectué quand j'avais deux ans, ne les aurait pas décelées

Seymour Papert
"Jaillissement de l'esprit"
Ed. Flammarion, 1981